《大衍曆》日食原理

袁敏 曲安京*

西北大學數學系（西安） 西北大學數學系（西安）

摘　　要

一行在《大衍曆》（724 年）中設計的日食算法，是張子信發現月亮視差對日食影響之後日食算法的一次全面改革，考慮了視食甚時刻太陽黃經、日月相對位置以及地理緯度等因素對日食預報的影響。通過對《大衍曆》術文的解讀，指出其蝕差算法相當於太陽時角h爲0時（正午）的理論食差算法，由此得出結論：《大衍曆》蝕差算法爲徐昂在《宣明曆》（822 年）中提出日食三差算法模型提供了重要的舖墊和正確的思路，在中國傳統數理天文學日食理論的進化史上，占有承前啓後的重要地位。在此基礎上，搞清楚了《大衍曆》日食食限與食分算法的構造方法，並給出了九服蝕差算法的幾何解釋。

關鍵詞：一行，大衍曆，月亮視差，日食，九服日食

古人云："曆法之驗，驗在交食。"可以說，日食計算是古代曆法中最重要的部分，因此，曆代曆法家對日月食的計算都非常的重視。從北齊（550～577）天文學家張子信發現月亮視差對日食的影響開始，隋唐曆法家對日食算法的構造進行了多次改革，至徐昂的《宣明曆》（822 年），始創日食三差算法，成爲中國曆法史上一個里程碑似的事件。不過，雖然對徐昂日食三差算法的天文學與數學原理，前人已經進行了深刻的討論，(註 1, 2)但是，到底徐昂是如何想到日食三差算法的？

基金項目：國家自然科學基金（10471111）

＊ 作者簡介：袁敏，女，1972 年生，陝西西安人，科學技術史博士，西北大學數學系講師，主要研究方向爲數理天文學史；曲安京，1962 年生，山東牟平人，西北大學數學系教授，主要研究方向爲精密科學史。本文通訊作者爲曲安京，電子郵件信箱：qaj@nwu.edu.cn。

1. 藪內清，隋唐曆法史の研究〔M〕，增訂版，京都：臨川書店，1989，頁 115-129。
2. 劉金沂，隋唐曆法中入交定日術的幾何解釋，《自然科學史研究》，1983，2 卷 4 期，頁 316-321。

從張子信發現月亮視差對日食預報的影響，到《宣明曆》日食三差算法的創立，這期間有過什麼樣實質性的進展和鋪墊？卻仍然是一個留待解決的問題。(註3)

本文將通過對一行在《大衍曆》(724年) 中構造的日食算法的分析，試圖爲解答這個問題，提供一點線索。我們發現，一行日食算法的核心，是計算日食蝕差，這個算法與《宣明曆》創立的日食食差算法有著深刻的聯繫，它幾乎可以看作是太陽時角h爲0時 (正午) 的食差算法。

另外，在《大衍曆》中，一行還制定了所謂的九服蝕差算法，以陽城的算法爲標準設計了不同地理緯度的日食蝕差算法。九服，泛指天子所在陽城之外的遼闊疆域，在中國曆法史上，只在《大衍曆》中出現過這個算法。作爲《大衍曆》日食理論的一個組成部分，我們對一行構造其九服蝕差算法的幾何模型進行了討論。

1.日食的蝕差

日食計算一般包括日食的判定 (食限)、日食的視食甚時刻、食分的大小、虧起方位、食延時間等內容。相較與月食計算，日食理論因月亮視差的影響，而複雜了很多。

由於計算得出的天體眞位置，是從地心看天體在天球上的投影，而觀測者在地面上看到的是天體的視位置，兩者之差就是視差。在日食計算中，月亮視差是影響日食計算精度的重要因素。(註4)

從現代天文學的概念來看，視差使月亮的視位置降低。由於月亮視差影響到

3. 現在通行的《中國天文學史》，在談到日食理論時，基本上都以《宣明曆》爲分界點。從《宣明曆》開始，方考慮因月亮視差而引起的各種修正算法。而對於張子信之後的隋唐曆法中的交食理論，雖然有所涉及，例如註［7］，特別是註［12］陳美東文獻中，對劉焯《皇極曆》到一行《大衍曆》的相關算法都進行了討論，但是，前者基本上是定性地指出了視差對交食的影響，後者雖然用現代符號解釋了《皇極曆》到《大衍曆》日食食限與食分算法，但是，並沒有從幾何上闡明《大衍曆》定義日食食限的眞正含義。因此，根據這些工作，無法深刻認識到月亮視差具體在什麼程度上、以什麼方式影響了日食的預報。給人們的感覺，在張子信月亮視差現象的發現到徐昂《宣明曆》日食三差算法的創立之間，日食理論的發展形成了一個巨大間躍。《宣明曆》之前的各種努力，很難看出其眞正合理的成分，因此，《宣明曆》日食三差算法的出現，就顯得特別的突兀。本文試圖根據一行《大衍曆》日食算法的分析，說明一行根據月亮視差現象而提出的日食蝕差算法，爲《宣明曆》創立日食三差理論，指引了方向。
4. 劉金沂，麟德曆交食計算法〔J〕，《自然科學史研究》，1984，3卷3期，頁251-260。

有關日食的所有計算，因而曆法家們需要設計修正月亮視差對日食影響的近似算法，以提高日食推算的精度。張子信發現月亮視差現象之後，經過 200 多年中外天算家的不懈努力，終於在《宣明曆》中，徐昂發明了以日食的食差爲核心的“日食三差”算法，使中國古代日食預測精度發生了質的飛躍。

由於月亮視差的影響，導致月亮到黃白道交點的距離發生變化。徐昂創立的日食三差算法，就是爲了修正日食食甚時刻所發生的這個變化。日食三差包含時差、氣差、刻差。其中，時差是對視食甚時刻的修正，而因月亮視差所導致的日食視食甚時刻月亮到黃白道交點的距離的改正量，被稱爲“食差”，它是氣差與刻差的代數和。

通過對日食食差算法進行系統的理論分析，應該可以清楚地了解到徐昂《宣明曆》以後，日食食差算法基本上再無本質的變化，在考慮月亮視差影響的情形下所建立起來的這套複雜的數值算法模型是合理的、有效的。(註 5)

一行在《大衍曆》日食理論中設計的“蝕差”算法，也是爲了修正日食食甚時刻月亮到黃白道交點距離的改正量，這個改正量雖然與《宣明曆》的食差不同，但卻可以看作是《宣明曆》食差算法的先聲。據《大衍曆》算法稱：

> 陰曆蝕差千二百七十五，蝕限三千五百二十四，或限三千六百五十九。陽曆蝕限百三十五，或限九百七十四。以蝕朔所入氣日下差積，陰曆減之，陽曆加之，各為朔［蝕］定差及定限。朔在陰曆，去交定分滿蝕定差已上者，為陰曆蝕。不滿者，雖在陰曆，皆類同陽曆蝕。其去交定分滿定限已下者，的蝕。或限已下者，或蝕。(註 6)

所謂月在陰曆（陽曆），即月亮在黃道上方（下方）。這段術文，給出了幾個重要的概念：蝕差、蝕限、或限、差積。蝕限與或限，是判斷日食發生的條件，即通常所說的“食限”。的蝕限，即必偏食限；或蝕限，即或偏食限。陰曆蝕差 1275，實際上是冬至時刻的蝕差，這個數據減去相應的差積，就可以得到所求日的日食蝕差，即“蝕定差”。

---

5. 曲安京，中國古代日食食差算法的原理〔J〕，《自然科學史研究》，2002，21 卷 2 期，頁 97-114。
6. 〔宋〕歐陽修編，《新唐書律曆志•大衍曆》〔A〕，中華書局編，《歷代天文律曆等志匯編》〔M〕，第七冊，北京：中華書局，1976，頁 2251。

理解上述術文的關鍵，是要搞清楚日食蝕差的意義。如圖 1，設點 Q、Q' 分別表示黃道與白道、視白道的交點，Z 表示天頂的方向。月亮 M_1、M_2 的視位置分別爲 M'_1、M'_2，其中 M_1 表示位於陰曆的月亮，M_2 表示位於陽曆的月亮，QM_1、QM_2 分別爲月亮 M_1、M_2 的去交分，此時，我們看到的月亮到黃白道視交點 Q' 的距離分別爲 $Q'M'_1$、$Q'M'_2$。

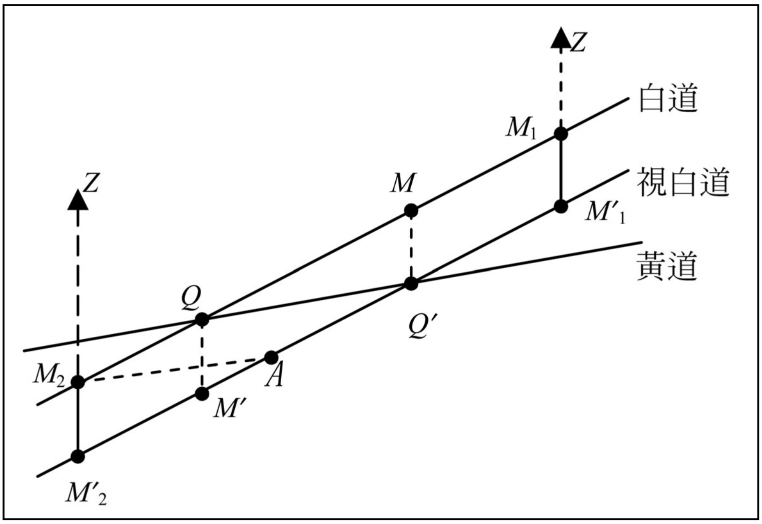

圖 1 《大衍曆》的蝕差

作 QM'、$Q'M$ 分別平行於 $M_1M'_1$、$(M_2M'_2)$

$$Q'M'_1=QM_1-QM,\ Q'M'_2=QM_2+QM$$

其中，$QM=Q'M'$，就是所謂的“蝕差”。藪內清認爲蝕差 p 相當於 QQ'，〔1，121 頁〕雖然這個看法是不對的，但卻得到很多天文學史家的採用，因此，有必要予以澄清和糾正。〔5，98 頁〕

在圖 1 中，若由點 M_2 作平行於黃道的弧段 M_2A，交視白道於 A 點，則 $QM_2=Q'A$, $Q'M'_2=Q'A+AM'_2$，記 $AM'_2=p$，《宣明曆》日食食差算法就是爲了修正這個改變量 p 設計的。由於圖中 $\Delta QM'Q' \cong \Delta M_2M'_2A$，所以《大衍曆》中的蝕差在數值上等於《宣明曆》中的 p。

根據日食食差算法的理論分析，我們知道蝕差（食差）

$$p=QM$$

是因月亮視差而導致的月亮距離黃白交點的改變量，它可以表示爲食甚時刻太陽的時角 h 與黃經 λ 的函數：

$$p=k_0+k\sin(h-\lambda) \tag{1}$$

其中 k_0 和 k 是由觀測地的緯度確定的常數。〔5，102 頁〕

而根據《大衍曆》的蝕差算法，假設 $f(x)$ 表示冬至後第 x 日的“差積”，則該日的蝕差即爲

$$p=5.61-f(x)\text{度} \tag{2}$$

其中，$5.61=1275v/A$, $v=13.36875$ 度／日，表示月亮的視速度，$A=3040$ 爲《大衍曆》的“通法”。由此可見，《大衍曆》的蝕差僅僅隨著季節的變化而變化，由於自變量x可以表示成太陽的黃經

$$\lambda\equiv270°+x(\text{mod } 360°)$$

其中，冬至後的日數 x，即平太陽在黃道上距離冬至點的古度數，已經按 1 度＝360°/365.25 換算成現代度。由此可見，《大衍曆》的蝕差 p 只是食甚時刻太陽黃經的函數，與時角的變化無關。

蝕差中的差積 $f(x)$，是根據《大衍曆》中的差積表（見表 1），按照標準的等間距分段二次內插法計算的。由於差積表中給出的數據，是一個二次差分表，因此，《大衍曆》的每日差積可以表示成如下的一元二次函數

$$f(x)=\frac{(45+x)x}{90}\text{分}=\frac{(45+x)xv}{90A}\text{度} \tag{3}$$

其中，$0\leqq x\leqq180$，表示該日到冬至的距離，取現代度（例如，春秋分爲 90，夏至爲 180）。我們可以將上式帶入上面的蝕差公式(2)，來計算《大衍曆》的每日日食蝕差p。

要明確地看清楚《大衍曆》日食蝕差算法的天文意義，可以將它與理論日食食差算法模型(1)進行比較。若令時角 $h=0$，則公式(1)變爲

$$p = k_0 - k\sin\lambda \tag{4}$$

其中，k_0 與 k 是兩個常數，在《大衍曆》制定的年代，這兩個常數大約爲 $k_0=5.56$ 度、$k=3.55$ 度。〔5，102 頁〕比較公式(2)與(4)，可以看出他們之間的對應

$$5.61 \backsim (k_0+k),\ f(x) \backsim k(1+\sin\lambda) \tag{5}$$

需要指出的是，除了常數的對應之外，用二次函數 $f(x)$ 逼近 $k(1+\sin\lambda)$ 是非常好的選擇。因此，《大衍曆》日食蝕差算法，在忽略了時角的因素時，與理論模型是比較相似的。我們根據公式(2)與(4)，分別計算《大衍曆》的蝕差與其理論値，如表 1 所示，並根據表中的數據，繪製出圖 2。

表 1 《大衍曆》日食蝕差的精度（時角 $h=0$）

定氣	黄經λ	差積/分	蝕差/分	蝕差/度	理論值/度	相對誤差
冬至	270°	0	1275	5.61	9.11	0.38
小寒\大雪	285\255	10	1265	5.56	8.99	0.38
大寒\小雪	300\ 240	25	1250	5.50	8.63	0.36
立春\立冬	315\225	45	1230	5.41	8.07	0.33
雨水\霜降	330\210	70	1205	5.30	7.34	0.28
驚蟄\寒露	345\195	100	1175	5.17	6.48	0.20
春分\秋分	0\180	135	1140	5.01	5.56	0.10
清明\白露	15\165	175	1100	4.84	4.64	0.04
穀雨\處暑	30\150	220	1055	4.64	3.79	0.22
立夏\立秋	45\135	270	1005	4.42	3.05	0.45
小滿\大暑	60\120	325	950	4.18	2.49	0.68
芒種\小暑	75\105	385	890	3.91	2.13	0.84
夏至	90°	450	825	3.63	2.01	0.81

由表 1 可以看出，即使對於時角 $h=0$ 的情形，《大衍曆》的蝕差算法的誤差也還是比較大的。通過式(5)可以看出，造成誤差的原因，主要有兩點：其一，冬至時刻的蝕差（5.61 度）太小了；其二，差積 $f(x)$ 的振幅不夠大。

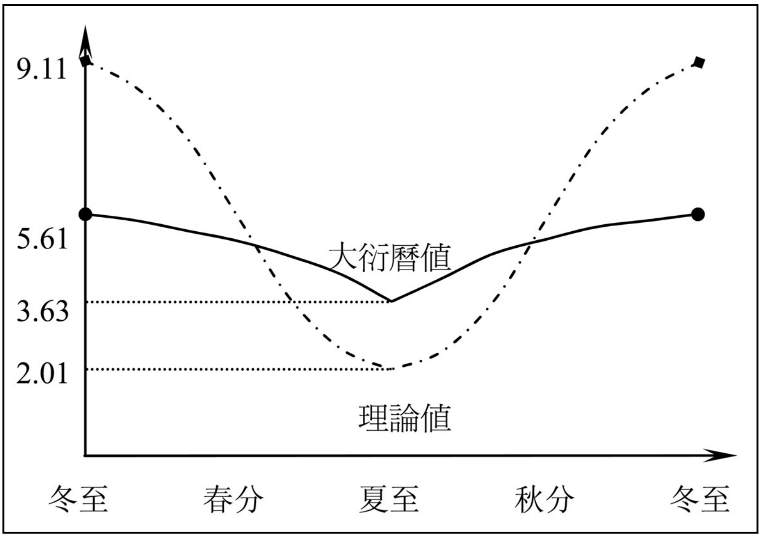

圖 2 《大衍曆》 蝕差的精度

不過，這些都不是問題的關鍵。

從圖 2 與式(5)可以看到，一行已經明確地認識到了太陽的黃經對日食蝕差的影響，並且用簡明的算法，深刻地描述了黃經的作用。從曲線的形勢上看，《大衍曆》的蝕差算法與理論算法（$h=0$）是相像的，這一點爲後世的曆法家們更加完美地構建日食食差算法的數值模型，開闢了正確的道路。

一行的算法僅僅考慮了正午時分（$h=0$）的蝕差，在確立了這個時刻的太陽黃經與蝕差的數值關係後，可以很容易通過對不同時刻日食記錄資料的分析和研究，發現太陽時角的變化對日食食差的影響。事實上，徐昻正是在這個經驗的基礎上，得到正確的結論，創立了影響深遠的日食三差算法。

人們以前並不太淸楚徐昻究竟是在什麼背景下創立日食三差理論，現在通過對一行《大衍曆》的日食蝕差算法的分析，可以對這個問題提供一個有意義的答案了。

2.日食食限與食分

由於合朔時日、月同黃經且赤緯相近，因此古人又依據太陽的赤緯和時角來描述月亮視差的大小。考慮到太陽的赤緯與其黃經有關，所以古人在某一觀測地

點，通過修正由所值節氣和太陽距午正時刻的食差來推算日食食甚時刻所發生的一些變化，是合理的。同時月亮在黃道南北兩側會造成太陽和月亮相對位置的不同變化，從而出現應食不食或不應食而食的現象，影響到日食食限，並對日食的食分大小也有影響。(註 7, 8)

當日月相會在黃白交點附近時，才可能發生日食，而對於“附近”的定量說明，需要給出日食食限的數量描述。在前面的引文中，《大衍曆》中給出了幾個有關日食食限的數據：陰曆食限 3524(15.50 度)、或限 3659 (16.09 度)；陽曆食限 135 (0.59 度)、或限 974 (4.28 度)。(註 9)已知合朔時刻差積$f(x)$，則有

$$\text{陰曆：定食限}=15.50-f(x)\text{ 度；定或限}=16.09-f(x)\text{ 度}$$
$$\text{陽曆：定食限}=0.59+f(x)\text{ 度；定或限}=4.28+f(x)\text{ 度}$$

我們知道，判斷日食的發生，要知道合朔時刻月亮到黃白交點的距離，即“去交定分”。假設 r_m 爲去交定分，由圖 1 可知月在陰、陽曆時的去交定分分別爲

$$\text{陰曆：}r_m=QM_1\text{；陽曆：}r_m=QM_2$$

當 $r_m\leqq$ 定食限時，必發生日食 (的蝕)；當 $r_m\leqq$ 定或限時，可能發生日食 (或蝕)。又，根據公式(2)，當 $r_m\geqq$ 蝕定差 $p=QM$ 時，視月亮必在黃道的上方，是爲“陰曆日食”；當 $r_m\leqq$ 蝕定差 $p=QM$ 時，視月亮已經落到黃道的下方，不管月亮本身是否在黃道上方 (陰曆)，都爲“陽曆日食”。這就是《大衍曆》給出的日食食限及其判定規則。由此可見，一行對於日食判斷的概念是非常清晰的。

在確定了日食的發生之後，便是求日食的食分。一行指出：“舊曆考日食深淺，皆自張子信所傳。”〔6，2209 頁〕所謂日食深淺，即指日食食分的多少。一行繼承了張子信提出的月亮視差影響日食食分的思想，在《大衍曆》中設計的日食食限與食分算法也考慮了月亮視差的影響。《大衍曆》算法稱：

---

7. 中國天文學史整理研究小組，《中國天文學史》〔M〕，北京：科學出版社，1981，頁 128-129。
8. 唐泉，中國古代的日食食分算法，《自然科學史研究》，2005，24 卷 1 期，頁 29-44。
9. 括弧中數據係由原始數據×13.36875/3040 換算而來。我們注意到，陰曆食限 3524 與陽曆或限 974 到視黃白交點 Q' 的距離相等：3524－1275＝974＋1275，按理，視白道上的食限應該是關於視黃白交點 Q' 對稱的，因此，如果陽曆或限 974 是陽曆食限，就合理了。另外，陰曆食限 3524、或限 3659、陽曆食限 135 之間的關係爲：3524＝3659－135，這個好像也沒什麼道理。

陰曆蝕者，置去交定分，以蝕定差減之，餘百四已下者，皆蝕既。已上者，以百四減之。餘以百四十三約之。其入或限者，以百五十二約之。半已下，為半弱。半已上，為半強。以減十五，餘為日蝕之大分。其同陽曆蝕者，其去交定分少於蝕定差六十已下者，皆蝕既。已上者，以陽曆蝕定限加去交分，以九十約之。其陽曆蝕者，置去交定分，亦以九十約之。入或限者，以百四十三約之。皆半已下，為半弱。半已上，為半強。命之，以十五為限，得日蝕之大分。〔6，2251 頁〕

上面的文字，給出了各種不同類型的日食食分的計算法，其中有兩個很重要的常數，即陰曆日全食限 104/143 與陽曆日全食限 60/90。這些數據與日食食分公式到底是如何得來的呢？

《大衍曆》規定，當食甚時刻視月亮落在視黃白交點 Q' 前後 104、60 分的區間內，爲日全食。由此可知，陰曆日全食與“同陽曆”日全食的最大食分分別爲：15＋104/143，15＋60/90。也就是說，當視食甚時刻視月亮位於視黃白交點 Q' 時，日全食的食分可以達到 15.7。

由於我們假定處在食限（或限）位置上的日食食分爲 0，因此，日食的最大食分應該滿足如下的方程

$$15.7=\frac{\text{食限}\pm 1275}{a} \tag{6}$$

其中，陰曆取“－”；陽曆取“＋”，a 是《大衍曆》各種日食食分公式中的分母，待定。

對於陰曆食限 3524，由公式(6)可以得到 $a=143$，於是，當食甚時刻月亮去交分爲 $1379\leqq r_m\leqq 3524$ 時，其食分公式爲

$$E=\frac{3524-r_m}{143}=15-\frac{r_m-1275-104}{143}$$

對於陰曆或食食限 3659，由公式(6)可以得到 $a=152$，於是，當食甚時刻月亮去交分爲 $3524\leqq r_m\leqq 3659$ 時，其食分公式爲

$$E=\frac{3659-r_m}{152}=15-\frac{r_m-1275-104}{152}$$

對於陽曆食限 135，由公式(6)可以得到 $a=90$，於是，陽曆日食食分爲

$$E=\frac{135\pm r_m}{90}=15-\frac{1275\mp r_m-60}{90}$$

其中，當月亮位於 QM 之間（陰曆，見圖 1）去交分爲 $0\leqq r_m\leqq 1215$ 時，稱爲“同陽曆蝕”，取上側的符號；當月亮位於黃道下方（陽曆）去交分爲 $0\leqq r_m\leqq 135$ 時，取下側的符號。

對於陽曆或食食限 974，由公式(6)可以得到 $a=143$，於是，當食甚時刻月亮去交分爲 $135\leqq r_m\leqq 974$ 時，陽曆或食食分爲

$$E=\frac{974-r_m}{143}=15-\frac{1275+r_m-104}{143}$$

以上日食食分 E 函數的右端，就是上面的術文所描述的公式。這就是《大衍曆》日食食分算法的構造過程。

3.九服蝕差

九服，泛指天子所在陽城之外的遼闊疆域。(註 10)按照《大衍曆》日食蝕差的理論算法(4)可以知道，如果僅僅考慮太陽黃經的變化，則蝕差算法取決於常數 k_0、k。而這兩個常數與觀測地的地理緯度有關。因此，緯度不同的地區，其日食蝕差算法應該是不一樣的。

一行認識到了這個問題，並在《大衍曆》中設計了專門算法，來處理不同緯度地區的日食蝕差的計算。其算法稱：

10. 曲安京等，中國古代的九服軌影算法，《自然科學史研究》，2001，20 卷 1 期，頁 13-21。

九服之地，蝕差不同。先測其地二至及定春秋中晷長短，與陽城每日中晷常數較取同者，各因其日蝕差為其地二至及定春秋分蝕差。以夏至差減春分差，以春分差減冬至〔差〕，各為率。並二率，半之，六而一，為夏率。二率相減，六而一，為總差。置總差，六而一，為氣差。半氣差，以加夏率，又以總差減之，為冬率。(冬率即冬至率。) 每以氣差加之，各為每氣定率。乃循積其率，以減冬至蝕差，各得每氣初日蝕差。(求每日，如陽城法求之。若戴日之南，當計所在地，皆反用之。)〔6，2252-2253 頁〕

一行的思路是，首先測定所在九服之地的二分、二至的晷影，然後以此晷影，同陽城周年的晷影相比較，將陽城與九服之地冬至、夏至、春秋分晷影相同的日子記下，分別取這些日子所對應的陽城的日食蝕差，爲九服之地冬至、夏至、春秋分的日食蝕差。再利用九服之地二分、二至的日食蝕差，構造二次內插法，從而可以計算九服之地全年中每一天的日食蝕差。

王應偉與陳美東曾經對上述術文中的冬至率等參數給出了詳細的解釋。雖然王應偉在“總差”的定義中弄反了符號，但是他正確給出了冬至率等參數。他認爲冬至率本身就是一個二次插值函數，是值得商榷的，他沒有在導出“每氣定率” $g(x)$ 後，給出“循積其率”的求和函數 $f(x)$ 來。(註 11)陳美東在《中國科學技術史•天文學卷》中對這個算法也進行了討論，但沒有分析該算法的構造方法。(註 12)

下面我們給出這個算法的構造方法的幾何解釋。

假設已經求得九服之地二分、二至的日食蝕差，如圖 3，令點 C、I、L 分別表示冬至、春分、夏至，由於從冬至到春分、從春分到夏至各有 6 氣，因此，令 $n=CI=IL=6$。根據術文，我們可以記

$$冬至蝕差-春分蝕差=S_{ACIH}=\Delta_1$$
$$春分蝕差-夏至蝕差=S_{FILK}=\Delta_2$$

11. 王應偉，《中國古曆通解》〔M〕，沈陽：遼寧教育出版社，1998，頁 290-292。
12. 陳美東，《中國科學技術史・天文學卷》〔M〕，北京：科學出版社，2003，頁 389-390。

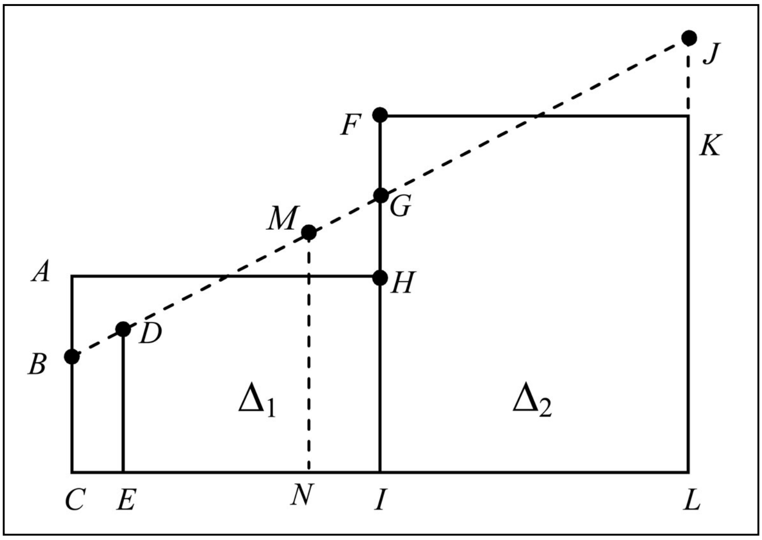

圖 3　九服蝕差算法

作斜線 BJ，使之通過 AH、FK 的中點，於是，$\Delta_1+\Delta_2$ 等積轉換爲梯形 $BCLJ$ 的面積。令 E 表示冬至後第一個氣（小寒），則 $CE=1$。根據圖 3，可以很容易地知道術文中各項參數的幾何意義：

$$\text{總差}=FH=GI-BC=\frac{\Delta_2-\Delta_1}{n}=\frac{\Delta^2}{n}$$

$$\text{夏率}=GI=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2n}\text{，氣差}=DE-BC=\frac{CE(GI-BC)}{CI}=\frac{\Delta^2}{n^2}$$

冬至率，是指冬至 (C) 到小寒 (E) 的蝕差差率，即

$$\text{冬至率}=S_{BCED}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2n}-\frac{\Delta^2}{n}+\frac{\Delta^2}{2n^2}$$

因爲每氣的差率已經知道（氣差），由此可得冬至後各氣的差率（每氣定率）

$$g(x)=(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2n}-\frac{\Delta^2}{n}+\frac{\Delta^2}{2n^2})+(x-1)\frac{\Delta^2}{n^2}$$

其中，冬至：$x=1$；小寒：$x=2$……。於是，令 $CN=x$，表示冬至後第 x 氣，則“循積其率”，可以得到冬至後第 x 氣與冬至時刻蝕差的差率

$$f(x)=S_{BCNM}=\sum_{m=1}^{x}g(m)=x(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{n}-\frac{\Delta^2}{2n})+x^2\frac{\Delta^2}{2n^2}$$

$f(x)$ 相當於《大衍曆》陽城算法中的“差積”。不難驗證，$f(x)$ 的三個插值點

$$f(0)=0,\ f(n)=\Delta_1,\ f(2n)=\Delta_1+\Delta_2$$

由此可見，$f(x)$ 是根據圖 3 導出來的一個標準的二次內插函數。得到了冬至後各氣差積 $f(x)$，就可以按照

$$p=\text{九服冬至蝕差}-f(x)$$

來推求各氣初日的蝕差。至於九服之地每日日食蝕差，則可以根據陽城的算法，利用每氣蝕差，構造分段二次內插函數來計算。

4.結論

現代天文學通常按月亮（或太陽）到黃白交點的黃經差，來設定日食的各種食限，如必偏食限等，但是，唐代以來的中國傳統曆法則習慣以視月亮到視黃白交點的距離來設定食限，因此，要考察這些食限的精度，必須注意到這個差別。這樣設計的食限，在計算日食的食分時，是非常方便的。(註 13)

張子信發現了月亮視差對日食的影響後，中國古代的天文學家開始了修正月亮視差的新的日食算法的設計。通過對《大衍曆》日食相關算法的理論分析及構造方法的幾何解釋，可以看出一行的日食理論思路明晰、構思合理，在日食視食甚時刻的修正、食限的判定、食分的計算中，全面考慮了導致月亮視差影響日食

13. 我們知道，日食時，日月距越大，月影錐就越長；日月距越小，月影錐就越短。但是，即使在最長情況下，月影錐在地球表面形成的截面直徑也不過 270 公里，因此，各地可見日食的類別與食分大小需要根據所在觀測地距影錐軸的距離，分別計算。所以 8 推算日食要比月食困難得多。按照現代天文學理論推算日食的食分，需要知道地球、太陽、月亮三者之間的距離，而這些數據，在中國傳統曆法中並沒有考慮。唐代曆法家設計的日食食分算法，是一種完全不同的模型。他們根據的是日食視食甚時刻，定義的一種特殊的“食限”，即視月亮到視黃白交點的距離，相當於視月亮的白道“經度”，這種日食食限，也與現代天文學的定義有所不同。從理論上看，唐宋曆法家建立的日食食分算法模型，是有效的、簡明的、合理的。這一點，尚未被現代天文史家所發現。

計算的因素。他設計的九服蝕差算法，是中國古代曆法中唯一一個適用於不同觀測地的日食蝕差算法。(註14)由此反映出一行對日食理論的全面、正確的認識，也標誌著中國古代的日食相關算法體系的成熟。

一行的蝕差算法是《大衍曆》日食理論的核心，根據本文的討論，可以肯定，一行已經深刻地認識到，食甚時刻太陽黃經對月亮視差大小產生的改變對日食預報的影響，雖然《大衍曆》的蝕差與理論值相比誤差還是比較大的，但在忽略了時角的因素時，與理論模型是比較相似的，它幾乎可以看作是太陽時角 h 爲 0 時（正午）的食差算法，這爲徐昂在《宣明曆》中構造更加合理的日食食差算法提供了必要的鋪墊和正確的思路。因此，我們說，《大衍曆》的日食理論，在中國傳統數理天文學之日食理論的進化史上，扮演了承前啓後的重要角色。

14. 由於日食現象的複雜性，通常很難給出一個一般的算法計算各地日食的發生情況及食分大小，因此，《大衍曆》的九服蝕差，只是一種近似算法。欲精確預報皇城以外的日食現象，還要根據當地的實際情況，按照皇城的方法，具體計算。所以，九服蝕差算法，在唐代以後的曆法中就沒有再紀錄了。

A Study on the Theory of Solar Eclipse in the *Dayan Li*

Min Yuan
Department of Mathematics
Northwest University, Xi'an, 710069

Anjing Qu
Department of Mathematics
Northwest University, Xi'an, 710069

ABSTRACT

In his *Dayan li* (724 AD), Yi-xing designed a new algorithm for calculating articles related with the solar eclipse, which is a full-scale reformation after Zhang Zixin discovered the influence of solar eclipse computations caused by the lunar parallax. In his calendar, Yi-xing considered modifying factors such as the longitude of the sun, the relative position between the sun and the moon at the middle of solar eclipse, and the latitude at the place of the observer. On the basis of reading and analyzing original texts of the *Dayan li*, this article discusses the method how to construct the algorithm for judging when the solar eclipse will happen and for calculating the magnitude of the solar eclipse. The algorithm for calculating the deviation caused by the lunar parallax at the middle time of the solar eclipse in different places, namely *Jinfu Shicha*, is explained by a view of a geometrical angle. The *Shicha* algorithm shows that it was equivalent to a theoretical model when the hour angle of the sun $h=0$. These characteristics of algorithms can offer a correct interpretation of the *shicha* algorithm after Yi-xing.

Key words: Yi-xing, lunar parallax, the *Dayan li*, solar eclipse

(收稿日期：2006.12.19；修正稿日期：2007.3.7；通過刊登日期：2007.5.23)